㊝

数　　学

(120 分)

注意事項

1. 解答開始の合図があるまで，問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は４問で，２ページあります。
3. 問題冊子には，「下書き用紙１」〜「下書き用紙４」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は，計算などに使用することができます。
4. 解答開始後，**解答冊子の表紙所定欄に受験番号，氏名をはっきり記入**しなさい。表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. **解答は，解答冊子の指定されたページに書きなさい。**解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は，どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後，問題冊子は，下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

1 (1) 袋の中に赤い玉が a 個，白い玉が b 個，青い玉が c 個入っている。最初に袋の中から玉を無作為に 1 個取り出し，取り出した玉を袋に戻すとともに，取り出した玉と同じ色の玉を n 個，袋に加える。次に袋の中から玉を無作為に 1 個取り出すとき，その玉が赤い玉である確率を P とする。P を求め，P が n に関係ないことを示せ。

(2) 媒介変数 t を用いて，$x = e^{-\frac{1}{2}t}$, $y = \sqrt{t^2+1}$ で表される曲線を C とする。原点から C に引いた接線の方程式を求めよ。

(3) 座標平面において，直交座標で表された点 $(\cos 3t \cos t,\ \sin 3t \cos t)$ の極座標 $(r,\ \theta)$ を考える。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(ア) $t = \frac{\pi}{4}$ のとき，$(r,\ \theta)$ を求めよ。

(イ) $0 \leqq t < \frac{\pi}{2}$ のとき，r を θ の式で表せ。

2 曲線 $C : y = |x^2 - 1|$ と直線 $\ell : -2x + 3y = k$ を考える。

(1) C と ℓ の共有点の x 座標が $-\frac{6}{5}$ のとき，k の値を求めよ。

(2) C と ℓ の共有点が 3 個以上のときを考える。

(ア) k の値の範囲を求めよ。

(イ) k が (ア) で求めた範囲の最大値をとるとき，すべての共有点の x 座標を求めよ。

(ウ) k が (ア) で求めた範囲の最小値をとるとき，$x \geqq 1$ が表す領域で，直線 $x = 1$ と C および ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $-\frac{6}{5} \leqq x \leqq \frac{5}{3}$ の範囲で C と ℓ の共有点が 2 個のとき，k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{9a_n-2}{9a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_n-\dfrac{2}{3}>0$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+1}-\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ を考える。

(1) $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2) n を自然数とする。$(n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi$ の範囲で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_n とする。

(ア) V_n を求めよ。

(イ) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ が収束することを示し，その和 S を求めよ。

問題は，このページで終わりである。